

УДК 539.3

Расчет процесса нелинейного деформирования гофрированных мембран

Николаева А. С.^{1,*}, Подкопаев С. А.¹

[*nikolaeva@bmstu.ru](mailto:nikolaeva@bmstu.ru)

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В настоящее время упругие элементы в виде гофрированных мембран получили широкое распространение в приборостроении. От точности расчета упругих элементов зависят надежность и качество приборов, поэтому расчет гофрированных мембран представляет собой актуальную задачу. Для расчета гофрированной мембраны был использован метод продолжения по параметру и метод смены подпространства управляющих параметров. Алгоритм реализован в авторской программе на языке С. Результатами расчета являются упругая характеристика мембраны, а также деформированная форма ее меридиана. Предложенная методика расчета показала свою эффективность и может быть рекомендована для анализа широкого круга упругих элементов.

Ключевые слова: упругий элемент, тонкостенная оболочка, большие перемещения, нелинейное деформирование

Упругие элементы находят широкое применение в приборостроении. Они используются для создания определенного натяга между деталями, для аккумуляции механической энергии, в качестве элементов передачи движения, упругих опор, чувствительных элементов измерительных приборов. От точности расчета упругих элементов зависят надежность и качество приборов [1].

Достаточно распространенным конструктивным исполнением упругого элемента является гофрированная мембрана (рис.1). Свойства гофрированной мембраны во многом зависят от ее профиля — образующей срединной поверхности.

Упругая характеристика гофрированной мембраны (зависимость характерного перемещения от внешней нагрузки) является нелинейной в отличие от других типов манометрических упругих элементов (сильфонов, трубчатых пружин), упругие характеристики которых близки к линейным. Поэтому гофрированные мембраны могут быть использованы для измерения величин, нелинейно связанных с давлением (например, воздушной скорости полета самолета, высоты его подъема, расхода жидкости или газа, проходящего по трубопроводу). Еще одной особенностью гофрированных мембран является возможность получения значительных перемещений в пределах упругого состояния материала. Однако существенная нелинейность характеристики мембраны приводит к сильному усложнению расчета.

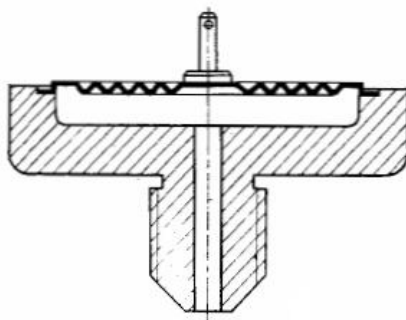


Рис.1 Конструкция мембраны чувствительного элемента

Теория нелинейного деформирования тонкостенных механических конструкций значительно развита. Нелинейное поведение тонкостенных оболочек с эффектом «прохлопывания» описывается в работах [2]-[3]. Недавние исследования [4]-[6] описывают численные алгоритмы для анализа нелинейного деформирования.

Данная статья посвящена расчету гофрированной мембраны с целью получения упругой характеристики и деформированной формы меридиана мембраны, а также исследованию процессов потери устойчивости. В качестве расчетной модели принимается тонкостенная осесимметричная оболочка вращения. Материал обладает линейно-упругими свойствами.

Рассмотрена гофрированная мембрана синусоидального профиля. Диаметр гофрированной мембраны, ее толщина и глубина гофрировки указаны на рис.2. Модуль упругости материала мембраны $E=0,95 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu=0,33$. Мембрана нагружена равномерным давлением.

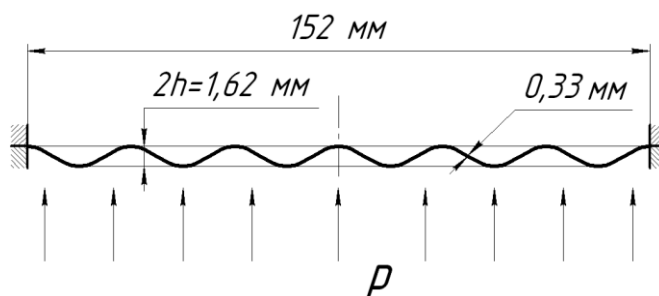


Рис.2. Геометрические характеристики гофрированной мембраны

Алгоритм расчета математической модели осесимметричной гофрированной мембраны постоянной толщины, основанный на теории упругих тонкостенных оболочек Рейсснера, был реализован в виде авторской программы на языке С. Для решения нелинейной задачи был использован метод смены подпространства управляющих параметров, разработанный Гаврюшиным С.С. [7,8] и метод продолжения по параметру, разработанный Валишвили Н.В. [9]. Суть метода смены подпространства управляющих параметров состоит в осуществлении кусочно-гладкого процесса продолжения решения по параметру. На каждом гладком участке численный анализ сводится к однопараметрической задаче.

Задача решается по двухэтапной схеме *предиктор-корректор* (рис.3). На этапе *предиктор* при помощи экстраполяции осуществляется предсказание начального значения неизвестных на основе предыстории процесса. На этапе *корректор* начальное приближение решения уточняется с помощью модифицированного метода Ньютона – Рафсона.

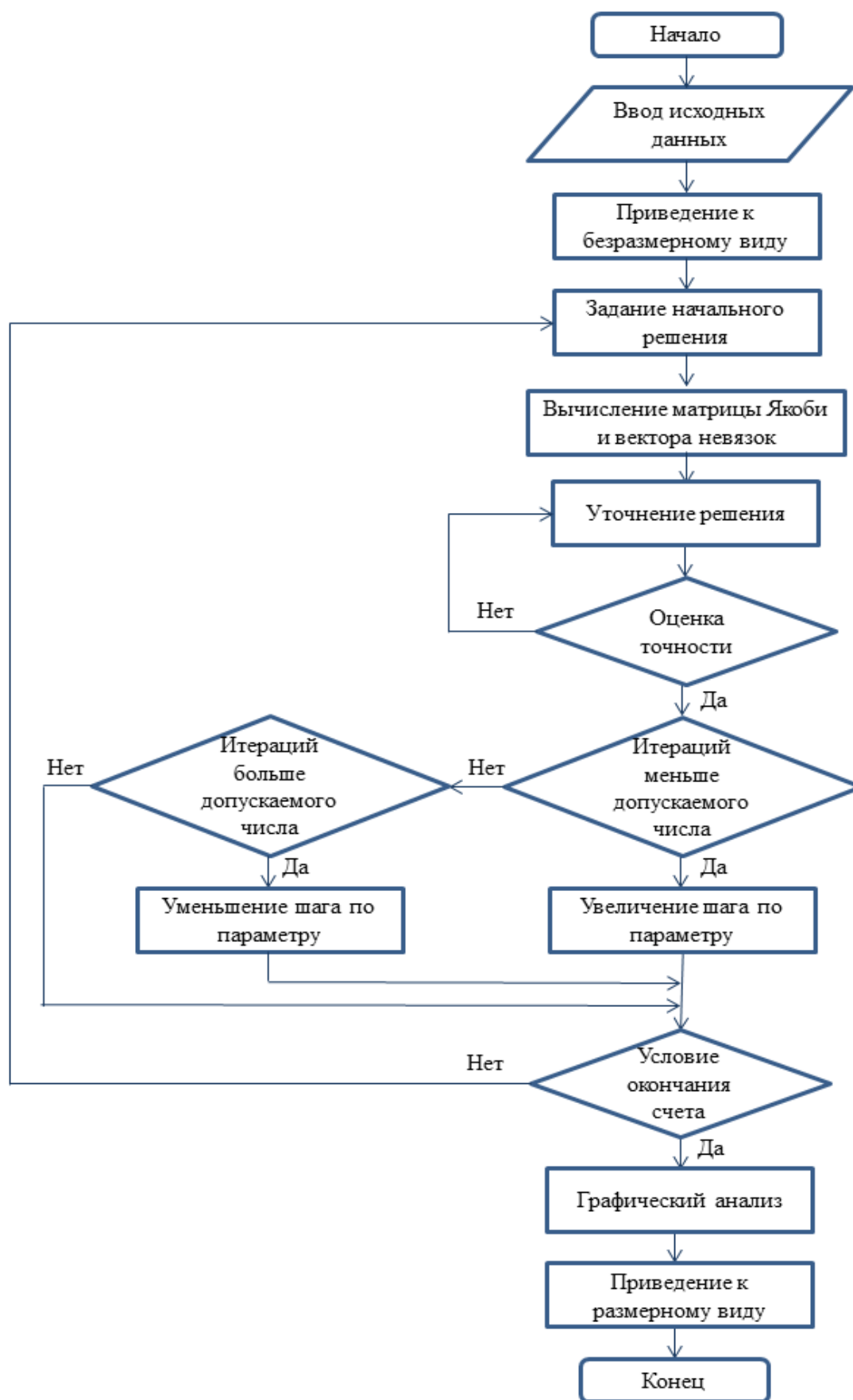


Рис. 3. Блок-схема программы расчета гофрированных мембран

В результате работы программы были получены следующие результаты. Упругая характеристика гофрированной мембраны при отношении глубины гофрировки к толщине мембраны $\frac{2h}{\delta} = 5.6$ приведена на рис. 4. По оси абсцисс отложено перемещение центральной точки гофрированной мембраны.

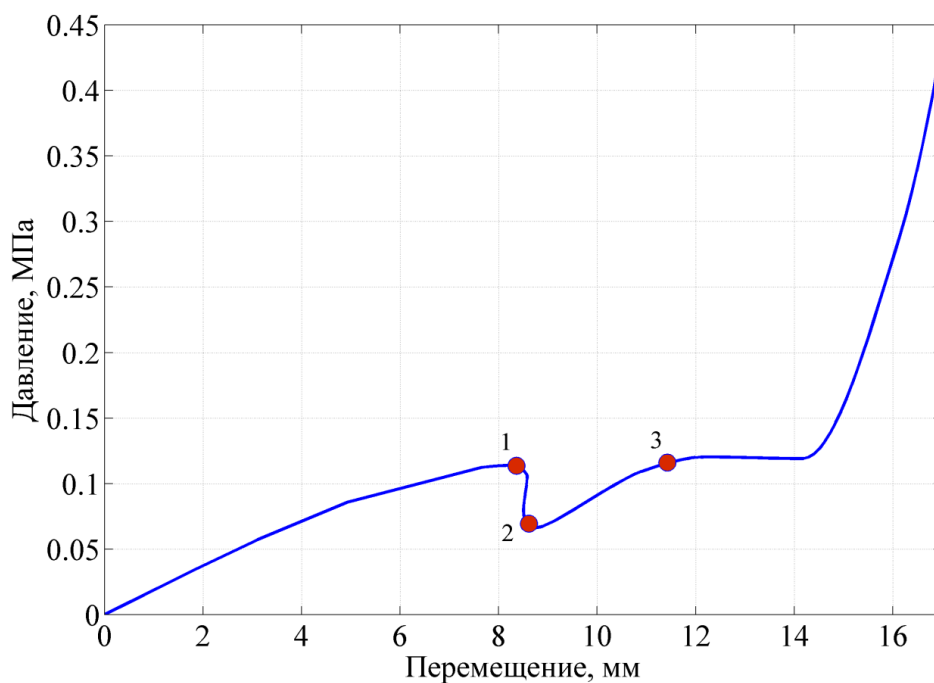


Рис. 4. Упругая характеристика гофрированной мембраны ($\frac{2h}{\delta} = 5.6$)

Деформированные формы меридиана гофрированной оболочки в соответствующих точках упругой характеристики приведены на рис. 5.

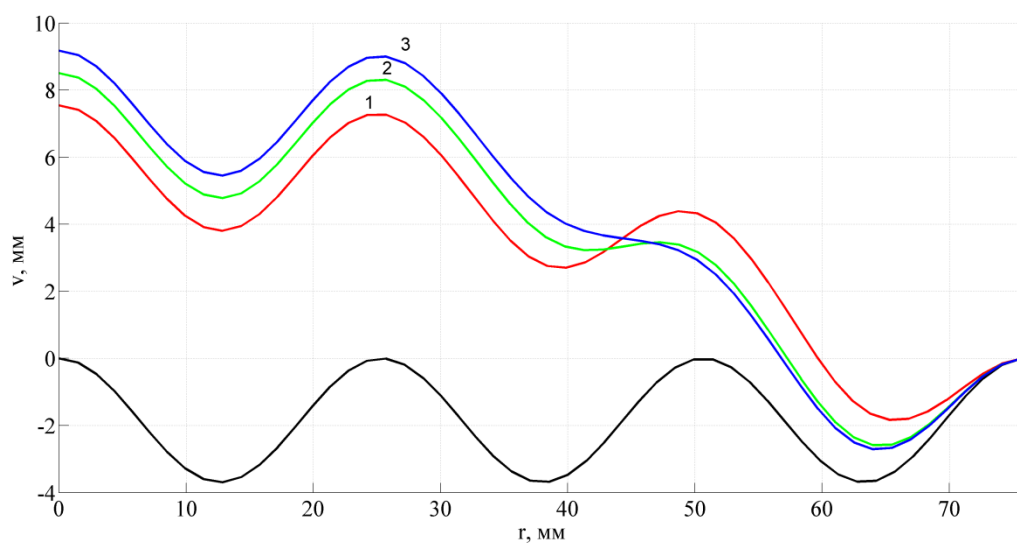


Рис. 5. Изменение формы меридиана гофрированной мембраны

Анализ полученных результатов

Переход от точки 1 к точке 3 упругой характеристики гофрированной мембраны осуществляется при прохлопывании мембраны - потере устойчивости внешнего гофра (рис. 4, 5). Наличие других неустойчивых участков на упругой характеристике мембраны объясняется постепенным прохлопыванием следующих гофров в процессе увеличения давления.

С помощью метода смены подпространства управляющих параметров возможно получение изолированного решения. Для этого необходимо сменить параметр продолжения на параметр глубины гофрировки: начать осуществления движения по поверхности равновесных состояний при неизменном перемещении характерной точки (пунктирная линия).

Физический смысл изолированного решения – это прохлопывание внешнего гофра, в случае, если гофрированная мембрана помещена в парафиновую пробку, не допускающую деформирование остальных гофров [10].

Выводы

Рассмотрено явление местной потери устойчивости. Получена упругая характеристика и деформированная форма меридиана гофрированной мембраны. Предложен способ получения изолированного решения с помощью приема смены подпространства управляющих параметров. Предложенный алгоритм позволяет эффективно исследовать поведение мембраны в процессе нелинейного деформирования.

Список литературы

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М.: Машгиз, 1962. 465 с.
2. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Конечные прогибы, устойчивость и за- критическое поведение тонких пологих оболочек. М.: МГТУ «МАМИ», 2004. 162 с.
3. Попов Е.П. Явление большого перескока в упругих системах и расчет пружинных контактных устройств // Инженерный сборник. 1948. Т. 5, вып. 1. С. 62-92.
4. Bich D.H., Tung H.V. Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects// International Journal of Non-linear Mechanics. 2011. Vol. 46, no. 9. P. 1195-1204. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2011.05.015](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.05.015)
5. Li Q.S., Liu J., Tang J. Buckling of shallow spherical shells including the effects of transverse shear deformation // International Journal of Mechanical Sciences. 2003. Vol. 45, no. 9. P. 1519-1529. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2003.09.020](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2003.09.020)
6. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 479 с.

7. Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 115-130.
8. Гаврюшин С.С. Анализ и синтез тонкостенных элементов робототехнических устройств с предписанным законом деформирования // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2011. № 12. С. 22-32.
9. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
10. Феодосьев В.И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой // Прикладная математика и механика. 1945. Т. 9, № 5. С. 389-412.

Corrugated Membrane Nonlinear Deformation Process Calculation

A.S. Nikolaeva^{1,*}, S A Podkopaev¹

[*nikolaeva@bmstu.ru](mailto:nikolaeva@bmstu.ru)

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: elastic element, thin-walled shell, large deformation, nonlinear deformation

Elastic elements are widely used in instrumentation. They are used to create a particular interference between the parts, for accumulating mechanical energy, as the motion transmission elements, elastic supports, and sensing elements of measuring devices. Device reliability and quality depend on the calculation accuracy of the elastic elements.

A corrugated membrane is rather common embodiment of the elastic element. The corrugated membrane properties depend largely on its profile i.e. a generatrix of the meridian surface.

Unlike other types of pressure elastic members (bellows, tube spring), the elastic characteristics of which are close to linear, an elastic characteristic of the corrugated membrane (typical movement versus external load) is nonlinear. Therefore, the corrugated membranes can be used to measure quantities, nonlinearly related to the pressure (e.g., aircraft air speed, its altitude, pipeline fluid or gas flow rate). Another feature of the corrugated membrane is that significant movements are possible within the elastic material state. However, a significant non-linearity of membrane characteristics leads to severe complicated calculation.

This article is aimed at calculating the corrugated membrane to obtain the elastic characteristics and the deformed shape of the membrane meridian, as well as at investigating the processes of buckling. As the calculation model, a thin-walled axisymmetric shell rotation is assumed. The material properties are linearly elastic. We consider a corrugated membrane of sinusoidal profile. The membrane load is a uniform pressure.

The algorithm for calculating the mathematical model of an axisymmetric corrugated membrane of constant thickness, based on the Reissner's theory of elastic thin shells, was realized as the author's program in C language. To solve the nonlinear problem were used a method of changing the subspace of control parameters, developed by S.S., Gavriushin, and a parameter marching method developed by N.V. Valishvili. The principle of the method of changing the subspace of control parameters is piecewise smooth parameter marching process. In each smooth section a numerical analysis is reduced to the one-parameter problem.

The problem is solved by two-stage *predictor-corrector* scheme. The *predictor* stage uses extrapolation to predict initial values of unknown on the basis of historical data. At the *corrector* stage a modified method of Newton - Raphson is used to specify initial approximation solutions.

As a result of the programme, the following results were obtained: elastic characteristic of the corrugated membrane and deformed shapes of a corrugated shell meridian in appropriate points of the elastic characteristic.

The paper has considered a phenomenon of local buckling. It has shown the elastic characteristic obtained and a deformed shape of the corrugated membrane meridian. The method to have an isolated solution by changing a subspace of control parameters has been proposed. The proposed algorithm enables efficient investigation of membrane behaviour during nonlinear deformation.

References

1. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М.: Машгиз, 1962. 465 с.
2. Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А. Конечные прогибы, устойчивость и за- критическое поведение тонких пологих оболочек. М.: МГТУ «МАМИ», 2004. 162 с.
3. Попов Е.П. Явление большого перескока в упругих системах и расчет пружинных контактных устройств // Инженерный сборник. 1948. Т. 5, вып. 1. С. 62-92.
4. Bich D.H., Tung H.V. Non-linear axisymmetric response of functionally graded shallow spherical shells under uniform external pressure including temperature effects// International Journal of Non-linear Mechanics. 2011. Vol. 46, no. 9. P. 1195-1204. DOI: [10.1016/j.ijnonlinmec.2011.05.015](https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.05.015)
5. Li Q.S., Liu J., Tang J. Buckling of shallow spherical shells including the effects of transverse shear deformation // International Journal of Mechanical Sciences. 2003. Vol. 45, no. 9. P. 1519-1529. DOI: [10.1016/j.ijmecsci.2003.09.020](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2003.09.020)
6. Гаврюшин С.С., Барышникова О.О., Борискин О.Ф. Численный анализ элементов конструкций машин и приборов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. 479 с.
7. Гаврюшин С.С. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования тонких упругих оболочек // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 115-130.
8. Гаврюшин С.С. Анализ и синтез тонкостенных элементов робототехнических устройств с предписанным законом деформирования // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2011. № 12. С. 22-32.
9. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
10. Феодосьев В.И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой // Прикладная математика и механика. 1945. Т. 9, № 5. С. 389-412.